**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ**  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.Г.ШУХОВА»**  
**(БГТУ им. В.Г.Шухова)**

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №4

Исследование операций и теория игр

Закрытая транспортная задача

Выполнил: ст. группы ПВ-21  
Ковалев Павел Александрович

Проверил: Брусенцев А.Г.

**Белгород 2020**

**Цель работы:** изучить математическую модель транспортной задачи, овладеть методами решения этой задачи.

**Задания для подготовки к работе**

1. Изучить содержательную и математическую постановки закрытой транспортной задачи, методы нахождения первого опорного решения ее системы ограничений. Изучить понятие цикла пересчета в матрице перевозок. Овладеть распределительным методом и методом потенциалов, а также их алгоритмами.

2. Составить и отладить программы решения транспортной задачи распределительным методом и методом потенциалов.

3. Для подготовки тестовых данных решить вручную одну из следующих ниже задач.

Спецификация программы

**def make\_cycle**(matrix, i, j):

Назначение: Получает цикл для свободной переменной с индексами i,j

Входные параметры: matrix - матрица перевозок, i - строка свободной переменной, j - столбец свободной переменной.

Выходные параметры: List, содержащий кортежи индексов клеток - узлов цикла.

**def shift\_cycle**(matrix, cycle, x):

Назначение: Сдвиг по циклу cycle матрицы перевозок matrix на число x

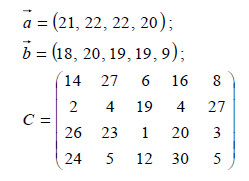
Входных параметры: matrix - матрица перевозок, cycle –цикл пересчета, x - величина сдвига

**def get\_first\_base**(a, b, c):

Назначение: Получение первого базисного вида

Входные параметры: a – запасы, b – потребности, c - матрица стоимостей.

Выходные параметры: матрица перевозок



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a\b | 18 | 20 | 19 | 19 | 9 |
| 21 | |  | | --- | | 14 | | |  | | --- | | 27 | | |  | | --- | | 6 | | |  | | --- | | 16 |   19 | |  | | --- | | 8 |   2 |
| 22 | |  | | --- | | 2 |   18 | |  | | --- | | 4 |   4 | |  | | --- | | 19 | | |  | | --- | | 4 | | |  | | --- | | 27 | |
| 22 | |  | | --- | | 26 | | |  | | --- | | 23 | | |  | | --- | | 1 |   19 | |  | | --- | | 20 | | |  | | --- | | 3 |   3 |
| 20 | |  | | --- | | 24 | | |  | | --- | | 5 |   16 | |  | | --- | | 12 | | |  | | --- | | 30 | | |  | | --- | | 5 |   4 |

Распределительный метод:

Сдвинули по циклу (1,1),(3,1),(3,4),(0,4),(0,3),(1,3) на 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a\b | 18 | 20 | 19 | 19 | 9 |
| 21 | |  | | --- | | 14 | | |  | | --- | | 27 | | |  | | --- | | 6 | | |  | | --- | | 16 |   15 | |  | | --- | | 8 |   6 |
| 22 | |  | | --- | | 2 |   18 | |  | | --- | | 4 | | |  | | --- | | 19 | | |  | | --- | | 4 |   4 | |  | | --- | | 27 | |
| 22 | |  | | --- | | 26 | | |  | | --- | | 23 | | |  | | --- | | 1 |   19 | |  | | --- | | 20 | | |  | | --- | | 3 |   3 |
| 20 | |  | | --- | | 24 | | |  | | --- | | 5 |   20 | |  | | --- | | 12 | | |  | | --- | | 30 | | |  | | --- | | 5 | |

Метод потенциалов:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a\b | 18 | 20 | 19 | 19 | 9 |
| 21 | |  | | --- | | 14 | | |  | | --- | | 27 | | |  | | --- | | 6 | | |  | | --- | | 16 |   19 | |  | | --- | | 8 |   2 |
| 22 | |  | | --- | | 2 |   18 | |  | | --- | | 4 |   4 | |  | | --- | | 19 | | |  | | --- | | 4 | | |  | | --- | | 27 | |
| 22 | |  | | --- | | 26 | | |  | | --- | | 23 | | |  | | --- | | 1 |   19 | |  | | --- | | 20 | | |  | | --- | | 3 |   3 |
| 20 | |  | | --- | | 24 | | |  | | --- | | 5 |   16 | |  | | --- | | 12 | | |  | | --- | | 30 | | |  | | --- | | 5 |   4 |

Сдвинули по циклу (1,1),(3,1),(3,4),(0,4),(0,3),(1,3) на 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a\b | 18 | 20 | 19 | 19 | 9 |
| 21 | |  | | --- | | 14 | | |  | | --- | | 27 | | |  | | --- | | 6 | | |  | | --- | | 16 |   15 | |  | | --- | | 8 |   6 |
| 22 | |  | | --- | | 2 |   18 | |  | | --- | | 4 | | |  | | --- | | 19 | | |  | | --- | | 4 |   4 | |  | | --- | | 27 | |
| 22 | |  | | --- | | 26 | | |  | | --- | | 23 | | |  | | --- | | 1 |   19 | |  | | --- | | 20 | | |  | | --- | | 3 |   3 |
| 20 | |  | | --- | | 24 | | |  | | --- | | 5 |   20 | |  | | --- | | 12 | | |  | | --- | | 30 | | |  | | --- | | 5 | |

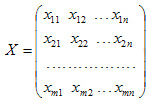
Ответы на контрольные вопросы

**1. Как формулируется транспортная задача? Что такое матрица перевозок? Как выглядит математическая модель закрытой транспортной задачи?**

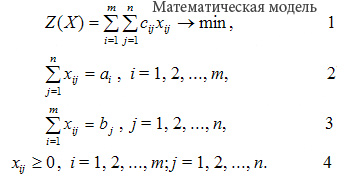
Общая постановка транспортной задачи заключается в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза с *m* баз *A*1, *A*2, ..., *A*m *n* потребителям *B*1, *B*2, ..., *Bn*.

Пусть имеются определенные запасы груза на базах *A*1, *A*2, ..., *Am*, которые мы обозначим *a*1, *a*2, ..., *am* соответственно. Заказы каждого из потребителей (потребности) обозначим *b*1, *b*2, ..., *bn*. Общее количество имеющегося груза обозначим *A* (*A* = *a*1 + *a*2 + ...+ *am*), а общие потребности — через *B* (*B* **=** *b*1 + *b*2 + ... + *b*n). При условии *A* = *B* мы имеем закрытую модель, а при *A* ≠ *B* — открытую модель транспортной задачи.

Известны **cij**, i=1,2,...m; j=1,2,...n — стоимости перевозки единиц груза от каждого i-го поставщика каждому j-му потребителю. Числа cij можно представить в виде матрицы стоимостей. Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются xij , i=1,2,...,m, j=1,2,...,n — объемы перевозок от i-го поставщика каждому j-му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок:

  
Целевая функция задачи имеет вид: 

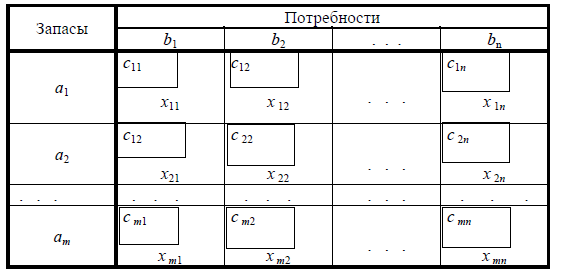
Учитывая условие неотрицательности объемов перевозок, математическая модель закрытой транспортной задачи выглядит следующим образом:



Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью, и суммарные затраты на перевозку всех грузов являются минимальными.

**2. Как записать транспортную задачу в форме таблицы данных?**

План перевозок с указанием запасов и потребностей, а также стоимостей перевозок, удобно записывать в виде таблицы данных. По строкам будут располагаться имеющиеся запасы, по столбцам, соответственно, потребности. Клетки таблицы xij будут представлять из себя количество груза, которое перевезти из пункта Ai в пункт Bj. Кроме этого, в каждой клетке таблицы на пересечении строки запасов i и столбца потребностей j будет находиться обозначение стоимости cij перевозки xij.



**3. Нахождение первого опорного решения системы ограничений транспортной**

**задачи. В чем заключаются метод северо-западного угла и метод**

**наименьшей стоимости?**

Решение транспортной задачи начинается с отыскания первого опорного плана (исходного опорного решения системы ограничений).  
Рассмотрим два метода построения такого опорного плана. Суть обоих методов состоит в том, что опорный план составляется последовательно в несколько шагов (*m* + *n* - 1 шагов). На каждом из шагов заполняется одна клетка. При рассмотрении клетки с номерами (*k*, *r*) на первом шаге может представиться три случая:

а) *ak* >*br*; в клетку ставится число *br*, вычеркивается *r*-тый столбец, а запасы в пункте *Ak* полагаются равными *ak* – *br*;

б) *ak* = *br*; в клетку ставится число *ak* = *br* и вычеркивается, по выбору, строка или столбец (вычеркивать и строку, и столбец нельзя). Оставшиеся потребности в пункте *br* или запасы в пункте *ak* полагаются равными нулю.

в) *ak* <*br;* в клетку записывается число *ak*, вычеркивается *k*-тая строка, а потребности в пункте *br* полагаются равными *br*- *ak*;

После первого шага таблица сократится на одну строку или на один столбец, а потребности или запасы будут подправлены. В сокращенной таблице снова выбираем для заполнения клетку и повторяем все сначала. Повторив *m* + *n* - 2 раз описанный шаг, придем к “таблице”, состоящей из одной клетки. Заполнив эту последнюю клетку и совершив *m* + *n* - 1 шаг, получим искомый опорный план.

Различие методов отыскания первого опорного плана состоит в различии способов выбора заполняемой клетки:

*Метод северо-западного угла.* В этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется верхняя левая клетка ("северо-западный угол") оставшейся таблицы.

*Метод наименьшей стоимости*. В этом методе на каждом шаге построения первого опорного плана заполняется та клетка оставшейся таблицы, которая имеет наименьший тариф. Если такая клетка не единственная, то заполняется любая из них.

**4. Что называют циклом в матрице? Какими комбинаторными свойствами**

**обладают циклы?**

*Циклом* в матрице называется ломаная линия, звенья которой располагаются по строкам и столбцам матрицы, и которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) эта ломаная является связной, т.е. из любой её вершины можно попасть в любую другую по звеньям ломаной;

2) в каждой вершине сходятся ровно два звена, причем одно из них располагается по строке, а другое по столбцу таблицы.

Циклы в таблице могут иметь *самопересечения*, т.е. звенья ломаной могут пересекаться в точке, не являющейся вершиной цикла.

Циклы в матрице обладают рядом свойств:

**1.** *Пусть дана матрица*, *состоящая из n строк и m столбцов*, *для которой выполнено неравенство n*·*m* ≥ *n* + *m*. *Если в этой матрице произвольно отмечено n*+*m клеток*, *то существует цикл с вершинами в отмеченных клетках* (*быть может не во всех*).

**2.** *Количество вершин любого цикла в матрице четно.*

**3.** *Во всяком означенном цикле число положительных вершин*, *лежащих в каждой строке или столбце, равняется количеству отрицательных вершин в этой строке или столбце.*

**5. Означенный цикл. Что называют сдвигом по означенному циклу в матрице**

**перевозок? Каким основным свойством обладает этот сдвиг?**

Цикл в матрице называется *означенным*, если каждой вершине его сопоставлен знак «+» или «-», причем при обходе цикла знаки чередуются, т. е. если вершина имеет какой-то знак, то соседним вершинам сопоставляется противоположный знак.

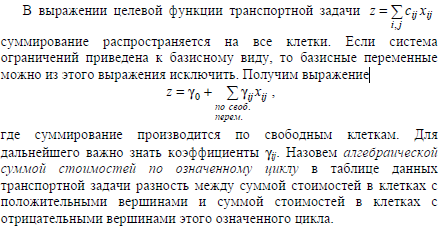
*Сдвигом по означенному циклу* на число x матрицы перевозок называется такое преобразование этой матрицы, при котором меняются лишь элементы в клетках, где находятся вершины цикла, причем элемент в клетке с положительной вершиной увеличивается на число x, а элемент в клетке с отрицательной вершиной уменьшается на это же число.

*При сдвиге по означенному циклу на число x решение системы ограничений транспортной задачи переходит снова в решение этой же системы ограничений. Если матрица перевозок является базисным решением системы ограничений транспортной задачи*, *то не существует цикла с вершинами только в базисных клетках.*

**6. Что называется циклом пересчета для данной свободной клетки?**

*Циклом пересчета для данной свободной клетки* называется означенный цикл, одна из вершин которого находится вданной свободной клетке, а остальные — в базисных клетках. Циклпересчета означивается так, что вершине в данной свободной клеткеприписывается знак «+».

**8. Как находится выражение целевой функции транспортной задачи через свободные переменные для произвольного базисного вида системы ограничений?**



Для любого базисного вида системы ограничений транспортной задачи коэффициент gij в выражении через свободные переменные целевой функции этой задачи равен алгебраической сумме стоимостей по циклу пересчета для свободной клетки xij.

**9. В чем заключается распределительный метод решения закрытой**

**транспортной задачи?**

Порядок работы по распределительному методу можно описать следующим образом:

1. Находится первое опорное решение одним из рассмотренных выше способов.

2. Для каждой свободной клетки строим цикл пересчета и определяем коэффициент y*ij* как алгебраическую сумму стоимостей по циклу пересчета. Если все коэффициенты y*ij*<0, то задача решена и найденное опорное решение является точкой минимума задачи. В противном случае переходим к пункту 3.

3. Выбираем свободную клетку с отрицательным значением g*ij* и рассматриваем величины перевозок в клетках с отрицательными вершинами цикла пересчета для *xij*. Из этих перевозок выбираем

наименьшую, которую обозначим через *x*.

4. Производим сдвиг по циклу пересчета для клетки, выбранной в пункте 3 на число *x*. Получаем новое опорное решение, на котором значение целевой функции будет меньше, чем на старом.

5. Переходим к пункту 2, то есть снова подсчитываем коэффициенты g*ij* для новых свободных клеток. Описанные шаги производятся до тех пор, пока на очередном шаге все коэффициенты y*ij* не станут неотрицательными.

**10. Опишите порядок работы по методу потенциалов.**

Каждому пункту отправления (базе) Ai сопоставим величину ui (потенциал пункта отправления), каждому потребителю Bj сопоставим потенциал vj. Будем находить эти потенциалы из того условия, что для каждой базисной клетки xkl сумма потенциалов равна стоимости в этой клетке uk + vl = ckl.

Для любой свободной клетки xij алгебраическая сумма стоимостей по циклу пересчета gij равна разности между стоимостью в этой клетке и суммой соответствующих потенциалов gij = cij - (ui + vj). правила работы по методу потенциалов.

1. Нахождение первого опорного решения.

2. Нахождение потенциалов пунктов отправления и назначения.

3. Нахождение коэффициентов yij = cij - (ui + vj) для свободных клеток. Если все yij < 0, то данное опорное решение является оптимальным и задача решена. В противном случае переходим к пункту 4).

4. Выбор свободной клетки с gij < 0. Построение цикла пересчета для выбранной клетки. Сдвиг по этому циклу опорного решения на величину минимальной перевозки среди тех, что стоят в клетках с отрицательными вершинами цикла пересчета. Получение нового опорного решения. Переход к пункту 2.

5. Операции, указанные в пунктах 1) — 4) повторяются до тех пор, пока величины gij для всех свободных клеток не станут неотрицательными. Соответствующее опорное решение будет точкой минимума транспортной задачи.